

DOI: 10.7652/xjtuxb201305014

二维各向异性功能梯度材料热传导的边界元分析

刘俊俏^{1,2}, 苗福生^{1,3}, 李星⁴

(1. 宁夏大学土木与水利工程学院, 750021, 银川; 2. 运城学院应用数学系, 044000, 山西运城;
3. 宁夏大学学术期刊中心, 750021, 银川; 4. 宁夏大学数学与计算机学院, 750021, 银川)

摘要: 为分析各向异性功能梯度材料的热传导问题, 热传导系数采用指数模型, 利用二维傅里叶积分变换和脉冲函数, 得到了各向异性功能梯度材料的热传导问题基本解; 利用基本解和边界条件, 推导出了热传导问题的边界积分方程; 将边界积分方程离散得到了边界元公式, 进一步给出了内点和边界点上的温度和热流计算公式。最后利用常边界单元方法给出了正方形模型算例, 说明了各向异性功能梯度材料具有缓解热应力和耐高温的特点。文中所得基本解可以为采用边界元法研究高温下各向异性功能梯度材料的力学性能提供理论上的支持。

关键词: 各向异性功能梯度材料; 热传导; 边界元法

中图分类号: O241.8 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2013)05-0077-05

Boundary Element Analysis of the Two-Dimensional Heat Conduction Equation for Anisotropic Functional Graded Materials

LIU Junqiao^{1,2}, MIAO Fusheng^{1,3}, LI Xing⁴

(1. School of Civil and Water Conservancy Engineering, Ningxia University, Yinchuan 750021, China; 2. Faculty of Applied Mathematics, Yuncheng University, Yuncheng, Shanxi 044000, China; 3. Academic Journal Center, Ningxia University, Yinchuan 750021, China; 4. School of Mathematics and Computer Science, Ningxia University, Yinchuan 750021, China)

Abstract: Focusing on heat conduction in anisotropic functionally graded materials, the thermal conductivity is taken as an exponent, and the fundamental solution to the heat conduction equation is derived by means of the two-dimensional Fourier integral transformation and the generalized function. Following the solution and the boundary conditions, the boundary integral equation is established. The temperatures and the heat flux at the internal points and the nodes are given in terms of the discretized boundary integral equation. The numerical examples are given by using constant boundary elements and a square model. It explains that the anisotropic functionally graded materials are endowed with some specific physical qualities, such as withstanding high temperature, and resisting thermal and remnant stresses. The fundamental solution is expected to investigate the thermo-mechanical behavior of the anisotropic functionally graded materials with the boundary element method.

Keywords: anisotropic functionally graded materials; thermal conductivity; boundary element method

功能梯度材料是一种新兴的非均匀复合材料, 由于其结构和性能连续变化, 因而既可以避免不同

材料直接拼接时产生突变带来的影响,同时还可用于缓解热应力和残余应力,目前已被广泛应用于航天航空、核反应、生物医学等几乎所有的工程材料加工行业。对于功能梯度材料裂纹处弹性波的散射问题,目前已有不少研究^[1-3]。边界元方法是继有限元数值解法之后发展起来的一种新型数值计算方法,其特点是降维、解析与离散相结合,只需要在区域的边界上划分单元,计算精度高^[4]。功能梯度材料具有耐高温的特点,故研究功能梯度材料的热应力和热断裂非常必要。文献[5]采用分离变量法和叠加法,研究了各向同性功能梯度材料平面热应力的通解。关于功能梯度材料的热断裂问题,也有不少学者进行了研究^[6-10],然而这些研究大都采用积分方程方法,梯度材料为各向同性。目前,利用边界元方法研究功能梯度材料的热断裂和热应力问题还比较少见,主要原因是基本解的寻找比较困难,尤其是各向异性梯度材料。

本文研究二维各向异性功能梯度材料的热传导问题:首先采用傅里叶积分变换方法和脉冲函数得到用修正的贝塞尔函数表示的基本解;然后利用基本解得到边界积分方程,给出边界元法的边界点和内点的计算公式;最后通过算例进行分析和讨论。

1 二维热传导的格林函数

对于二维区域 Ω ,边界设为 Γ ,梯度系数为 β 的指数型各向异性功能梯度材料的热传导系数为

$$K_{ij} = K_{ij0} \exp(-\beta y), (i, j = 1, 2; K_{120} = K_{210}) \quad (1)$$

其不含热源的热传导方程为

$$K_{110} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2K_{120} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + K_{220} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \beta \left(K_{120} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0 \quad (2)$$

记

$$L = K_{110} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2K_{120} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + K_{220} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \beta \left(K_{120} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

设基本解为 G ,则

$$LG(x, y; x_0, y_0) = -\delta(x - x_0, y - y_0) \exp(\beta y_0) \quad (3)$$

对方程(3)做二维傅里叶积分变换,可以得到

$$\hat{L}\hat{G}(\xi, \eta; x_0, y_0) = \exp(-i(\xi x + \eta y)) \exp(\beta y_0) \quad (4)$$

式中

$$\hat{L} = K_{110} \xi^2 + 2K_{120} \xi \eta + K_{220} \eta^2 + i\beta(K_{120} \xi + K_{220} \eta) \quad (5)$$

由此可以得到傅里叶积分变换后的格林函数

$$\hat{G}(\xi, \eta; x_0, y_0) = \frac{\exp(-i(\xi x + \eta y)) \exp(\beta y_0)}{\hat{L}} \quad (6)$$

对式(6)做二维傅里叶积分逆变换,可以得到

$$G(x, y; x_0, y_0) = \frac{1}{4\pi^2} \exp(\beta y_0) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \{\exp[i(\xi(x - x_0) + \eta(y - y_0))]\} / \hat{L} d\xi d\eta \quad (7)$$

为了计算积分,做如下的变量替换

$$\xi K_{110}^{1/2} + \eta K_{220}^{1/2} = \alpha_0 (R \cos \varphi - \alpha_1) \quad (8)$$

$$\xi K_{110}^{1/2} - \eta K_{220}^{1/2} = 2(R \cos \varphi + \alpha_2) \quad (9)$$

式中

$$\alpha_0 = \frac{[(K_{110} K_{220})^{1/2} - K_{120}]^{1/2}}{[(K_{110} K_{220})^{1/2} + K_{120}]^{1/2}}$$

$$\alpha_1 = \frac{i\beta K_{220}^{1/2}}{4\alpha}; \quad \alpha_2 = -\frac{i\beta K_{220}^{1/2}}{4}$$

令 $\alpha_0 = \frac{2[(K_{110} K_{220})^{1/2} - K_{120}]}{(K_{110} K_{220})^{1/2}}$, $\alpha^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2$, 则式

(5)可以化简为

$$\hat{L} = \alpha_3 (R^2 - \alpha^2) \quad (10)$$

式(7)中被积函数的指数部分可以化简为

$$\xi(x - x_0) + \eta(y - y_0) = \alpha_0 \left(\frac{x - x_0}{K_{110}^{1/2}} + \frac{y - y_0}{K_{220}^{1/2}} \right) R \cos \varphi + \left(\frac{x - x_0}{K_{110}^{1/2}} + \frac{y - y_0}{K_{220}^{1/2}} \right) R \sin \alpha + \frac{\beta(y - y_0)}{2} \quad (11)$$

令

$$\frac{x - x_0}{K_{110}^{1/2}} + \frac{y - y_0}{K_{220}^{1/2}} = A \cos \theta$$

$$\alpha_0 \frac{x - x_0}{K_{110}^{1/2}} + \frac{y - y_0}{K_{220}^{1/2}} = A \sin \theta$$

则式(11)可以简写为

$$\xi(x - x_0) + \eta(y - y_0) = AR \cos(\phi - \theta) + \frac{\beta(y - y_0)}{2} \quad (12)$$

式(8)和式(9)的雅克比行列式值为

$$J = -\frac{2R\alpha_0}{(K_{110} K_{220})^{1/2}} \quad (13)$$

因此式(7)可以转化为

$$G(x, y, x_0, y_0) = -\frac{\exp(\beta y_0)}{4\pi^2} \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \{[-2R\alpha_0 e \exp(i(AR \cos(\varphi - \theta) + \frac{\beta(y - y_0)}{2}))]\} / [\alpha_3 (R^2 - \alpha^2) (K_{110} K_{220})^{1/2}] \} d\varphi dR \quad (14)$$

利用贝塞尔函数的积分表达式

$$J_m(z) = \frac{(-i)^m}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(iz\cos\phi + im\phi) d\phi \tag{15}$$

式(14)可以简化为

$$G(x,y,x_0,y_0) = \frac{\alpha_0 \exp[\beta(y+y_0)/2]}{\pi\alpha_3(K_{110}K_{220})^{1/2}} \int_0^{+\infty} \frac{RJ_0(AR)}{(R^2-\alpha^2)} dR \tag{16}$$

利用留数积分方法可知

$$\int_0^{+\infty} \frac{RH_0(AR)}{(R^2-\alpha^2)} dR = -\frac{\pi}{2} Y_0(A\alpha) \tag{17}$$

则格林函数可以用第二类贝塞尔函数表示为

$$G(x,y,x_0,y_0) = \frac{\exp[\beta(y+y_0)/2]}{4\pi(K_{110}K_{220}-K_{120}^2)^{1/2}} Y_0\left(\frac{i\beta T}{2}\right) \tag{18}$$

式中

$$T = \left[\frac{K_{22}}{K_{11}K_{22}-K_{12}^2} (K_{22}(x-x_0)^2 + 2K_{12}(x-x_0)(y-y_0) + K_{11}(y-y_0)^2) \right]^{1/2}$$

由于第二类贝塞尔函数的变量为复数,这里采用修正的贝塞尔函数表示,利用

$$i\pi H_0^{(1)}(iz) = 2K_0(z) \tag{19}$$

$K_0(z)$ 当 $z \rightarrow 0$ 时有对数奇异性,因此可以得到基本解为

$$G(x,y,x_0,y_0) = -\frac{\exp[\beta(y-y_0)/2]}{2\pi(K_{110}K_{220}-K_{120}^2)^{1/2}} K_0\left(\frac{\beta T}{2}\right) \tag{20}$$

2 边界积分方程

考虑边界条件为

$$u = \bar{u}, \text{ (on } \Gamma_1); \quad \nabla u \cdot \mathbf{m} = \bar{u}_n, \text{ (on } \Gamma_2)$$

其中 $\mathbf{m} = (K_{110}n_1 + K_{120}n_2)\mathbf{i} + (K_{120}n_1 + K_{220}n_2)\mathbf{j}$, $\mathbf{n} = n_1\mathbf{i} + n_2\mathbf{j}$ 是法向量。

利用格林公式

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x} d\Omega = -\int_{\Omega} v \frac{\partial u}{\partial x} d\Omega + \int_{\Gamma} uv n_1 ds \tag{21}$$

$$\int_{\Omega} v \frac{\partial u}{\partial y} d\Omega = -\int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial y} d\Omega + \int_{\Gamma} uv n_2 ds \tag{22}$$

可以得到

$$\int_{\Omega} [GL(u) - uL(G)] d\Omega = \int_{\Gamma} (G \nabla u \cdot \mathbf{m} - u \nabla G \cdot \mathbf{m}) ds \tag{23}$$

将式(2)、式(3)代入式(23),可以得到

$$\epsilon(x_0,y_0)u(x_0,y_0)\exp(\beta y_0) = \int_{\Gamma} (G \nabla u \cdot \mathbf{m} - u \nabla G \cdot \mathbf{m}) ds \tag{24}$$

式中

$$\begin{aligned} \epsilon(x_0,y_0) &= 1, \quad (x_0,y_0) \in \Omega \\ \epsilon(x_0,y_0) &= \frac{1}{2}, \quad (x_0,y_0) \in \Gamma \end{aligned}$$

因此可以得到边界积分方程

$$\frac{1}{2}u(x_0,y_0)\exp(\beta y_0) = \int_{\Gamma} G \nabla u \cdot \mathbf{m} ds - u \nabla G \cdot \mathbf{m} ds \tag{25}$$

3 边界元公式

将边界 Γ 划分为 N 个线单元 $\Gamma_j (j=1,2,\dots,N)$,每个单元上的节点为 (x_i,y_i) ,则边界积分方程(25)可以化为

$$\frac{1}{2}u(x_0,y_0)\exp(\beta y_0) = \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma} G \nabla u \cdot \mathbf{m} ds - \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma} u \nabla G \cdot \mathbf{m} ds \tag{26}$$

为方便讨论,用 u^i, u_n^i 分别表示 $u(x_i,y_i)$ 和法向量。这样,方程(26)可以化为

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}u^i \exp(\beta y_0) &= -\sum_{j=1}^N \left(\int_{\Gamma} u^j \nabla G \cdot \mathbf{m} ds \right) + \\ &\sum_{j=1}^N \left(\int_{\Gamma} G (1 + \beta(K_{220} - K_{120})) ds \right) u_n^j \end{aligned} \tag{27}$$

影响系数矩阵记为

$$\left. \begin{aligned} H_{ij} &= \hat{H}_{ij} + \frac{1}{2} \delta_{ij} \exp(\beta y) \\ \hat{H}_{ij} &= \int_{\Gamma} \nabla G \cdot \mathbf{m} ds \\ G_{ij} &= \int_{\Gamma} G (1 + \beta(K_{220} - K_{120})) ds \end{aligned} \right\} \tag{28}$$

调整影响系数矩阵中的元素顺序,把未知的边界值 u^i, u_n^i 放到等式的左边,已知的放到右边,可以得到如下方程组

$$[H_{12} - G_{11}][(u)_2, (u_n)_1]^T = -H_{11} \bar{u} + G_{12} \bar{u}_n \tag{29}$$

式中: H_{1j}, G_{1j} 是调整后的矩阵元素。通过求解线性方程组(29),就可以得到边界上所有节点上的 u^i 和 u_n^i 的值。对于区域内的点,可以采用如下公式进行计算

$$u(x_i,y_i)\exp(\beta y_i) = -\sum_{j=1}^N \hat{H}_{ij} u^j + \sum_{j=1}^N G_{ij} u_n^j \tag{30}$$

计算影响系数矩阵 (x_i,y_i) 时,用内点代替边界点。

4 数值算例和讨论

为了方便计算和讨论,采用正方形区域,对区域边界进行等单元划分,边界条件和结点如图 1 所示,区域内取 9 个内部点,边界上取 16 个单元和 16 个结点。对式(28)中的影响系数进行求解,在第 j 个单元(端点为 $(x_{j+1}, y_{j+1}), (x_j, y_j)$)上,用直线参数方程

$$\left. \begin{aligned} y(\xi) &= \frac{y_{j+1} + y_j}{2} + \frac{y_{j+1} - y_j}{2} \xi \\ x(\xi) &= \frac{x_{j+1} + x_j}{2} + \frac{x_{j+1} - x_j}{2} \xi \end{aligned} \right\} \quad (-1 \leq \xi \leq 1) \quad (31)$$

将曲线积分转化为 $[-1, 1]$ 上的定积分,然后利用高斯四点积分计算,得到影响系数矩阵。通过式(29)和式(30),可以得到边界上的温度和热流,以及区域内点的温度。不同热传导系数和梯度系数下边界结点和内点上的温度如图 2、图 3 所示,其中当 $y=0$ 时,传导系数采用文献[11]中给出的材料系数,当边界上的温度和热流给定后,区域内部的温度与热传导系数和梯度系数有密切关系。当热传导系数固定后,梯度系数取不同值分别计算出各个内点和结点处的温度,结果表明,梯度系数的调整可以缓解温度和热流的变化。

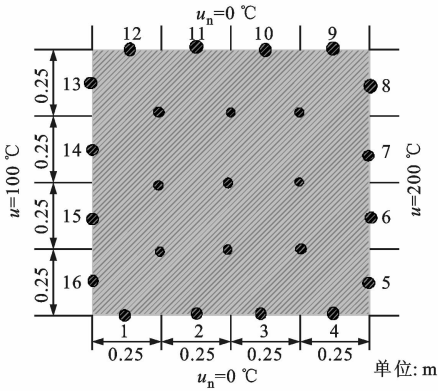


图 1 正方形边界划分和取点

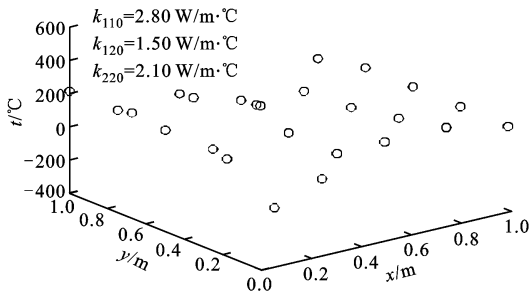
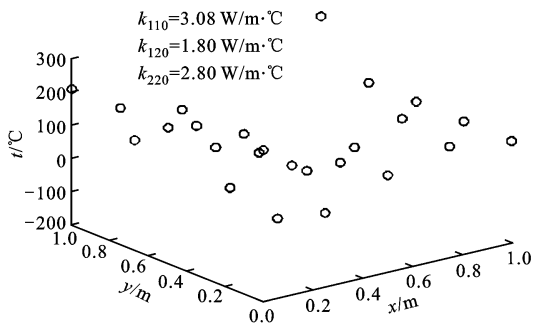
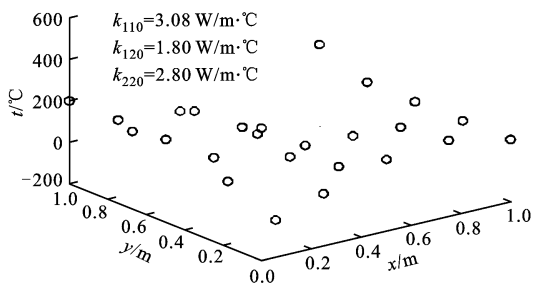


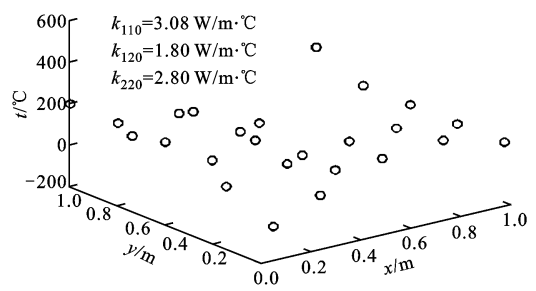
图 2 $\beta=1.0$ 、热传导系数较小时各点的温度和热流



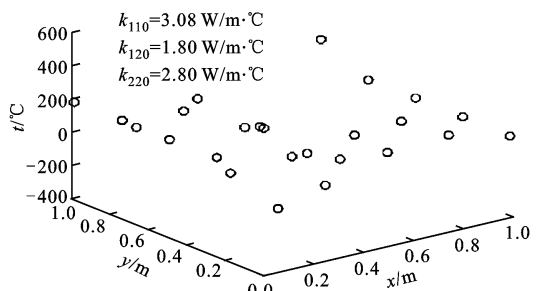
(a) $\beta=0.5$



(b) $\beta=1.0$



(c) $\beta=1.2$



(d) $\beta=1.5$

图 3 β 取不同值时各点的温度和热流散点图

5 结 论

本文利用傅里叶积分变换和脉冲函数,得到了各向异性功能梯度材料热传导问题的基本解,该基本解也是具有对数奇异性的修正贝塞尔函数;利用该基本解推导出了各向异性功能梯度材料热传导问

题的边界积分方程;将边界离散得到了边界元公式,进一步可以计算出内点和结点的温度和热流。以正方形模型和常单元为算例进行了数值计算,从计算结果可以看出,各向异性功能梯度材料有缓解热应力和耐高温等特点,沿着梯度连续变化的方向可以缓解热应力和热流。从图3中可以看出,梯度系数越大,则各离散点的温度越低,说明梯度材料可以阻滞热传导。本文获得的基本解可以用于各种功能梯度材料热传导问题的边界积分方程,也可以退化为各向同性功能梯度材料热传导问题的边界积分方程(见文献[4])。本文提供的方法可以为高温下功能梯度材料的设计和断裂研究提供理论上的支持。利用边界元方法,只需要知道边界上的温度就可以计算出内点的温度和热应力。

参考文献:

- [1] LI Xing, LIU Junqiao. Scattering of the SH wave from a crack in a piezoelectric substrate bonded to a half-space of functionally graded materials [J]. *Acta Mechanica*, 2009, 208(3): 299-308.
- [2] 刘俊俏,段惠琴,李星. SH波在压电材料条中垂直界面裂纹处的散射 [J]. *固体力学学报*, 2010, 31(4): 385-391.
LIU Junqiao, DUAN Huiqin, LI Xing. The scattering of SH wave on a vertical crack in a coated piezoelectric strip [J]. *Chinese Journal of Solid Mechanics*, 2010, 31(4): 385-391.
- [3] 刘俊俏,李星. SH波在正交各向异性功能梯度材料直裂纹处的散射 [J]. *临沂师范学院学报*, 2006, 28(3): 16-19.
LIU Junqiao, LI Xing. The scattering of SH wave on a crack in an infinite of orthotropic functionally graded material plane [J]. *Journal of Linyi Teachers' College*, 2006, 28(3): 16-19.
- [4] KATSIKADELIS J T. Boundary elements theory and applications [M]. Amsterdam, The Netherlands: Elsevier, 2002: 92-96.
- [5] 刘俊俏,段惠琴,董淑转. 指数型功能梯度材料平面问题热应力通解 [J]. *数学的实践与认识*, 2010, 40(19): 100-103.
LIU Junqiao, DUAN Huiqin, DONG Shuzhuan. The general solution of the pane thermal stress in the functional materials with exponential variation of constants [J]. *Mathematics in Practice and Theory*, 2010, 40

(19): 100-103.

- [6] CHEN Jian. Determination of thermal stress intensity factors for interface crack in a graded orthotropic coating-substrate structure [J]. *International Journal of Fracture*, 2005, 133(4): 303-328.
- [7] ZHOU Y T, LI X, QIN J Q. Transient thermal stress analysis of orthotropic functionally graded materials with a crack [J]. *Journal of Thermal Stresses*, 2007, 30: 1211-1231.
- [8] JIN Z H, FENG Y Z. Thermal fracture resistance of a functionally graded coating with periodic edge crack [J]. *Surface and Coatings Technology*, 2008, 202(17): 4189-4197.
- [9] ZHOU Yueting, LI Xing, YU Dehao. A partially insulated interface crack between a graded orthotropic coating and a homogeneous orthotropic substrate under heat flux supply [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2010, 47(6): 768-778.
- [10] DING Sheng-Hu, LI Xing. Thermal stress intensity factors for an interface crack in a functionally graded layered structures [J]. *Arch Appl Mech*, 2011, 81(7): 943-955.
- [11] ITOU S. Thermal stress intensity factors of an infinite orthotropic layer with a crack [J]. *International Journal of Fracture*, 2000, 103: 279-291.

[本刊相关文献链接]

申仲旸,谢永慧,张荻. 布置球窝的U型冷却通道传热性能研究. 2013, 47(3): 108-113.

晏鑫,李军,丰镇平. 迷宫密封传热特性的数值研究. 2012, 46(11): 1-5.

樊鹏飞,张兄文,李国君,等. 板式固体氧化物燃料电池的热应力分析. 2012, 46(7): 75-81.

张宗卫,朱惠人,刘聪,等. 全气膜冷却叶片表面换热系数和冷却效率研究. 2012, 46(7): 103-107.

黄东洋,洪军,张进华,等. 热阻网络法在轴系温度场求解中的应用. 2012, 46(5): 63-66.

张颖莉,种道彤,刘继平,等. 方管内混合对流与管壁导热耦合换热的数值模拟. 2012, 46(5): 19-24.

申仲旸,谢永慧,张荻,等. 不同球窝/凸结构的旋转矩形通道传热及阻力特性研究. 2011, 45(11): 52-57.

邱波,李军. 刷式密封传热特性研究. 2011, 45(9): 94-100.

蓝吉兵,谢永慧,张荻. 微通道中球窝/球凸强化传热特性研究. 2011, 45(7): 89-94.

(编辑 葛赵青)